Contrôle n°1

**Exercice 1**

Démontrer que les réels suivants sont irrationnels :

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ou x et y sont des rationnels positifs tel que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
2. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
   *Indication : On pourra supposer que* $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ *est rationnel et calculez* $(r - \sqrt{5})^2$.

**Exercice 2**

1. Soient A et b deux parties non vides de B telle que $\forall x \in A \quad \forall b \in B, \quad a < b$

   Montrer que sup A et $\mathrm{Inf}$ B existent et que sup $A \leq \mathrm{Inf}$ B.

2. Soit A une partie non vide et minorée de B. On pose $\alpha = \inf A \;\; et \;\; B = A \cap ]-\infty, \alpha + 1]$

   Montrer que $\inf A = \inf B$.

3. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup\{|x-y|, (x,y) \in A^n\} = supA - \inf A$$

4. Calculer la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum, s'ils existent de l'ensemble suivant :

$$A = \{\frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$$

**Exercice 3**

Le but de l'exercice est de démontrer, le résultat suivant :
*Théorème.*
*Soit* $f : [a,b] \to [a,b]$ *une fonction croissante définie sur un segment non trivial de* $\mathbb{R}$ $(a > b)$.
*Il existe* $c \in [a,b], tel\ que\ f(c) = c$.

Soit $E = \{ x \in [a,b] \,/ f(x) \geq x\}$

1. Montrer que $E$ admet une borne supérieure que l'on notera $c$.
2. Montrer par l'absurde que $f(c) = c$.
   *Indication : On pourra étudier les deux cas* $f(c) > c$ *et* $f(c) < c$

**Exercice 4**

**I** : Soit $f$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) + 1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$ puis calculer les limites sur ses bornes.
2. La fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité en $0^+$. Si oui donner son prolongement en 0.
3. Montrer directement que $f$ est strictement monotone sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$. (Sans utiliser la dérivée).

4. En déduire que $f$ est bijective de $]\frac{1}{e};+\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera puis déterminer $f^{-1}$.

**II** : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-x+2+\sqrt{x^2+1}$.

1. Montrer que q est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $I$ que l'on précisera.
2. Montrer que l'équation $g(x)=4$ admet une unique solution dans $]-2,0[$.