Contrôle n°2

**Exercice 1**

Les questions suivantes sont indépendantes.

1.
   a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $x = 2$ des fonctions $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$
   b. En déduire :
$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2}$$
2. Soit la formule de Taylor avec reste intégral. Pour tout $\alpha, x \in \mathbb{R}$ et $f \in C^{n+1}([a\,; x])$, on a
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$
Soit $f(x) = \ln(1 + x^2)$. En appliquant à $f$ la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,1]$, à un ordre convenable, montrer que :
$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln(2)}{2}$$
3.
   a. Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b],\ f(x) = f(a + b - x)$
   Montrer que :
$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$
   b. En déduire la valeur de l'intégrale :
$$I = \int_0^\pi \frac{x sinx}{1 + cos^2(x)} dx$$

**Problème**

On appelle sécante hyperbolique la fonction définie par

$$sch(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

1.
   a. Déterminer l'ensemble de définition $D$ de la fonction $sch$ et étudiez sa parité.
   b. Etudiez les variations de la fonction $sch$ et précisez ses limites aux bornes de $D$.
   c. Etudiez la convexité de la fonction $sch$ sur le domaine $D$.
   d. Formez le développement limité à l'ordre 4 de fonction $sch$ au voisinage de $0$.
   En déduire l'équation de la tangente au voisinage de $0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangentes en $0$.
   e. Montrez que la restriction de $sch$ à l'intervalle $[0, +\infty[$ induit une bijection sur un intervalle $J$ à préciser.
   f. On note $Argsch$ son application réciproque. Donnez son ensemble de définition et de continuité ainsi que ses variations.
   g. Tracer sur le même graphique la courbe de la fonction $sch$ et celle de $Argsch$.(On rappelle que la courbe d'une fonction réciproque se déduit de celle de la fonction par symétrie par rapport à la première bissectrice).

h. Montrez que :

$$\forall x \in J,\ \ Argsch(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

2. Soient un réel $x$ et $k$ un entier strictement positif. On considère la famille de fonctions

$$g_k(x) = \int_0^x \frac{1}{cosh^k(t)}\,dt$$

a. Calculer $g_1(x)$ et $g_2(x)$.

b. En intégrant par partie, trouver une relation entre $g_{k+2}(x)\ et\ g_k(x)$.

c. En déduire $g_3(x)$ et $g_4(x)$.

d. Démontrer que la fonction $g_k : x \ \rightarrow\ g_k(x)$ est impaire, continue, monotone et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

e. Calculez $g'_k(x)$, $g''_k(x)$ et $g_k{}^{(3)}(x)$.

f. Donner le développement limité de $g_k$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

3. On se propose, pour $k$ fixe, d'étudier la suite $(u_n)_{n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*}$, définie par $u_n = g_k(n)$.

a. Montrer que cette suite est monotone.

b. Démontrer que, pour tout $t$, $\frac{1}{\cosh(t)} \leq 2e^{-t}$, en déduire que la suite converge.