Contrôle n°1 (1h45mn)

Exercice 1 (5,5 pts.)

On considère la fonction numérique de la variable réelle

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2Arctg(\frac{1-x}{1+x})$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, celui de continuité et de dérivabilité. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que tout $n \geq 2$, la dérivée de f d'ordre $(n-1)$ est de la forme $f^{(n-1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$ où P_n est un polynôme de degrés n.
3. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet n racines réelles et distinctes.

Exercice 2 (7 pts.)

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^+$ et B une partie non vide de $\mathbb{R}^+_*$.

On considère l'ensemble suivant : $A/B = \left\{\frac{a}{b}; a \in A, b \in B\right\}$.

1. Montrer que si m est un minorant de A et M est un majorant de B alors $\frac{m}{M}$ est un minorant de A/B.
2. Montrer que si B n'est pas majorée alors $\forall\, \varepsilon > 0, \exists x \in A/B$ tek que $x < \varepsilon$.
3. Montrer que si B n'est pas majorée alors $\inf(A/B) = \{0\}$.
4. Montrer que si $A \neq \{0\}$ et si $\inf(B) = \{0\}$ alors A/B n'est pas majorée.
5. On suppose que A et B sont deux intervalles. Montrer que A/B est un intervalle.
6. On pose $A = B =]0; \varepsilon[$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$. Montrer que $A/B = \mathbb{R}^+_*$.

Exercice 3 (7,5 pts.)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f, et son domaine de dérivabilité D'. Etudier la parité de f.
2. Dans cette question, on étudie les variations de f.
   a. Calculer $f'(x)$ pour $x \in D'$.
   b. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   c. En déduire le tableau de variation de f.
3. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
   a. Montrer que g admet une application réciproque qu'on notera h, et donner l'ensemble de définition de h.
   b. Déterminer une écriture simple de $g'(x)$ puis de $g(x)$.
   c. En déduire une expression de $h(x)$.