# *Examen Final*

## *Analyse 1*

## *Durée 2h*

**Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être encadrés. La calculatrice, les formulaires, les téléphones les appareils électroniques, bavardage, échange de matériel sont interdits. Toute tentation de tricherie sera sanctionnée.**

**A la fin d'examen vous déposez vos stylos, vous restez dans vos places, en attendant les surveillants ramassent les copies.**

**Vous n'avez pas le droit de sortir durant l'examen.**

**Tout candidat ne respecte pas ces consignes sera sanctionné sévèrement par un zéro dans l'Examen.**

### *Problème : 11Pts*

Soit une fonction $f$ est infiniment continue et dérivable sur son ensemble de définition $D_f$.

***Préliminaire :***

1) Donner la formule de Taylor avec reste intégrale de la fonction $f$ *au voisinage d'un point a, à l'ordre n.* **0.5 pts**
2) A l'aide de la formule de Taylor Lagrange Déterminer **1pts**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

### Partie I

3) Soit $f(x)=\ln(1+x^2)$ calculer sa dérivée n$^{ieme}$ **1.5pts**
4) donner la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $f$. ***0.5 pts***
5) pour tout $x\in[0,1]$ déduire la valeur de

$$\frac{1}{5!}\int_0^1(1-t)^5 f^{(6)}(t)dt \quad \textbf{1.5pts}$$

6) en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction **1.5pts**

$$x \to \ln(1+x)$$

Pour x entre 0 et 1, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

**Partie II**

On considère la fonction $f(x) = \exp(x)$.

7) Démontrer que : $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| < \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$ pour n entier et x réel. 1.5pts

8) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

9) Déduire le développement limité de $x \to f(x) + f(-x)$, 1pts
$x \to f(x) - f(-x)$. A l'ordre n au voisinage de 0.

10) Déduire le DL de au voisinage de 0 à l'ordre n de *th(x)*. 2pts

***Exercice : 9Pts***

*Calculer les primitives des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = x\, arctan(\frac{x-1}{x+1})$ *2pts*

2) $f(x) = \frac{x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)}$ *2,5pts*

3) $f(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)cos^2(x)} \frac{2-\sin(2x)}{2+\sin(2x)}$ *2pts*

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ *2,5pts*