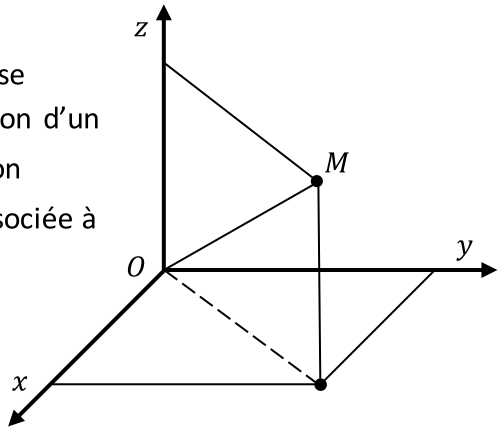
Contrôle n°1

Exercice 1



Soit le repère orthonormé cartésien $R(O,B)$ associé à la base cartésienne orthonormée $B(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$, dans lequel la position d'un point matériel M de l'espace est défini par le vecteur position $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$. On définit alors le repère cylindrique $R_c(O,B_c)$ associée à la base orthonormée $B_c(\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_\varphi},\overrightarrow{e_z})$.

1. Positionner sur un schéma semblable à celui-ci-dessus les vecteurs $\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z},\overrightarrow{e_\rho}\ et\ \overrightarrow{e_\varphi}$.
2. φ étant fonction du temps, calculer les expressions de $\left[\frac{\partial\overrightarrow{e_\rho}}{\partial t}\right]_R$ et $\left[\frac{\partial\overrightarrow{e_\varphi}}{\partial t}\right]_R$ dans la base cylindrique B_c en fonction de $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.
3. Calculer $\left[\frac{\partial\overrightarrow{e_x}}{\partial t}\right]_{R_C}$ et $\left[\frac{\partial\overrightarrow{e_y}}{\partial t}\right]_{R_c}$ dans la base cylindriqueB_c.
4. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans B et dans B_c.
5. Calculer la vitesse du point M par rapport au référentiel cartésien R : $\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R$, en exprimant le résultat dans B puis dans B_c.
6. Calculer la vitesse du point M par rapport au référentiel cylindrique R_c : $\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_c}$, en exprimant le résultat dans B puis dans B_c.

Exercice 2

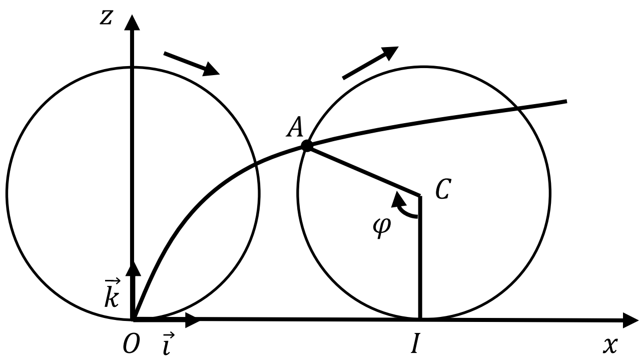
A. Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $R(Oxyz)$ par ces coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) telles que : $\rho=a, \varphi=\omega t, z=h\varphi$.
$(a,\omega\ et\ h)$ sont des constantes positives.
   1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cylindriques.
   2. Déduire l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ en coordonnées cylindriques.
   3. Déduire l'expression du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ en coordonnées cylindriques.
   4. Quelle est la nature du mouvement et la trajectoire du mouvement de M par rapport à R.

B. Un autre point matériel P décrit une courbe plane d'équation polaire :
$\rho=re^{-\alpha t}$ et $\varphi=\omega t$. $(r,\omega\ et\ \alpha)$ sont des constantes positives.
Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base polaire.
   1. Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OP}$.
   2. Calculer la vitesse $\vec{V}(P/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(P/R)$ du point matériel P.
   3. Calculer l'angle entre le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ et la tangente à la trajectoire pour $\alpha=3\ S^{-1}$ et $\omega=4\ rad.S^{-1}$.

4. Calculer l'accélération tangentielle $\vec{\gamma}_t$ et l'accélération normale $\vec{\gamma}_n$ du point matériel P.
5. Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire.
6. Déterminer l'équation polaire de la trajectoire et donner sa nature et tracer l'allure.

Exercice 3

Une roue circulaire de centre C, de rayon a, roule sans glisser sur (Ox), tout en restant dans le plan (Oxz)(voir figure).
Un point A de la roue coïncide à l'instant $t = 0$ avec l'origine O du repère. Le centre C a une vitesse constante V_0.



1. Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OA}$ à l'instant t sachant que $\overrightarrow{OI} = a\varphi\vec{\imath}$.
2. Calculer $\vec{V}$, le vecteur vitesse de A par rapport au sol et étudier ses variations au cours du temps. Pour quelles positions de A ce vecteur est-il nul ?
3. Calculer $\vec{\gamma}$, le vecteur accélération de A par rapport au sol.
4. Soit le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ caractérisant la rotation de la roue. Donner l'expression de $\vec{\Omega}$. Calculer le produit vectoriel $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IA}$. Le comparer à $\vec{V}$ et commenter.
5. Représenter $\vec{V}$ sur la figure. Montrer que $\vec{V}$ peut-être décomposé en deux vecteurs de même module, l'un parallèle à (Ox), l'autre tangent à la roue.
6. On peut considérer que le mouvement de a est le résultat de la composition de deux mouvements :
   - Un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Cy) de la roue, caractérisé par le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.
   - Un mouvement de translation rectiligne uniforme de la roue (vitesse $V_0\,\vec{\imath}$).

   Retrouver $\vec{V}$ *et* $\vec{\gamma}$ en utilisant les lois de compositions des vitesses et des accélérations.