Contrôle n°2

<u>Exercice 1</u> (12 pts.)

Soit $R(O,X,Y,Z)$ une référentiel galiléen muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{z})$ et $R_1(O_1,X_1,Y_1,Z_1=Z)$ un repere relatif lié à la tige (T) et muni de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$. La tige (T), confondue avec l'axe (O_1X_1), tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire de rotation ω constante et positive, tel que $\vec{\Omega}_{R_1/R}=\omega\vec{k}$.

L'extrémité de O_1 de la tige, se déplace sur l'axe (OZ) avec une vitesse V_0 constante telle que : $\vec{V}(O_1)_{/R}=\dot{z}\vec{k}=V_0\vec{k}$. A l'instant $t=0$, le point O_1 est confondu avec O.
Un petit anneau M de masse m se déplace sans frottement sur la tige (T). Il est attaché ç l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée en O_1 (Figure 1).

Le ressort exerce sur l'anneau M la force $\vec{F}=-k(\rho-l_0)\vec{e}_\rho$. On donne : $\varphi=(\vec{\imath},\vec{e}_\rho)=\omega t$ et $\|\overrightarrow{O_1M}\|=\rho$.

Toutes les grandeurs vectorielle doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$.

1. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction de ρ, V_0 et t.
2. Déterminer les accélérations, relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entrainement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$.
3. Donner les expressions vectorielles de toutes forces qui s'appliquent à M.
4. Par application du principe fondamentale de la dynamique dans le référentiel relatif R_1, déduire :
   4.1. L'équation différentielle du mouvement de M.
   4.2. Les composantes de la réaction $\vec{R}$.
5. Donner la position d'équilibre relatif r_e et déterminer l'équation de mouvement au voisinage de r_e, sous forme : $f(\ddot{\varepsilon},\varepsilon)=0$ avec $\varepsilon=r-r_e$.
6. Résoudre cette équation en utilisant comme conditions initiales : $\varepsilon(0)=a>0$ et $\ddot{\varepsilon}(0)=0$.
7. Donner les expressions des composantes de la réaction $\vec{R}$ en fonction de ε.

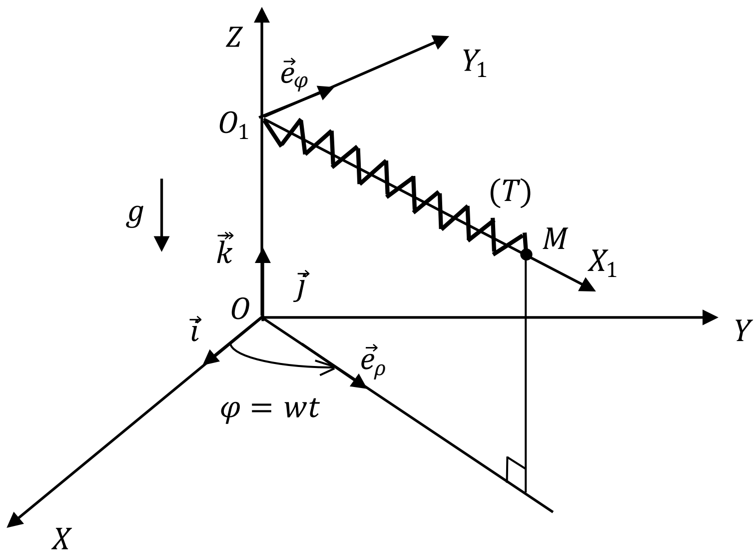
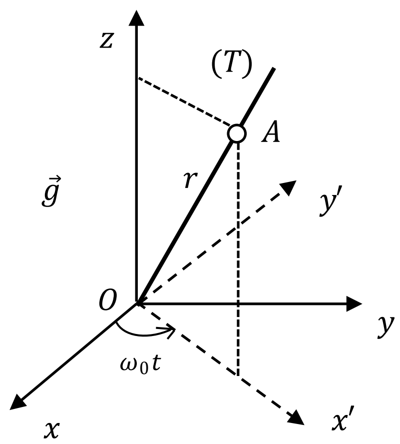


Figure 1

Exercice 2 (5 pts.)

Une masselotte A, de masse m, peut coulisser sans frottements, sur une tige (T). On note r la distance OA entre l'extrémité de la tige et la masselotte A considérée comme ponctuelle.
Cette tige, inclinée de l'angle θ_0 par rapport à l'axe Oz du repère galiléen $R(O, xyz)$, tourne uniformemnt à la vitesse angulaire ω_0 autour de Oz.
On note $R'(O, x', y', z')$ le repère orthonormé direct lié à la tige, et indiqué sur la figure ci-contre.

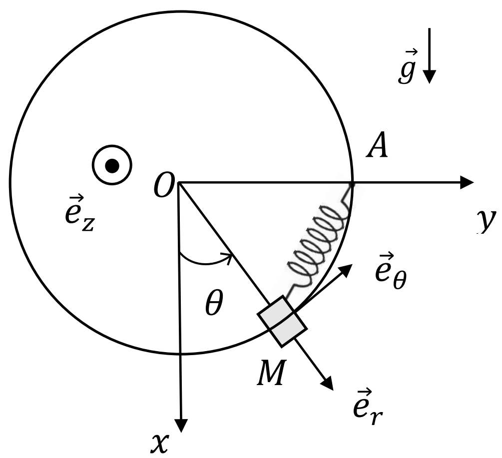


A l'instant initial, A est lâché sans vitesse initiale à la distance r_0 et l'on cherche à étudier le mouvement ultérieur de A dans R'.

a. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur A.
b. Calculer l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement (on prendra l'origine de l'énergie potentielle en O).
c. En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(r)$.
d. Déterminer la position d'équilibre r_e de l'anneau et discuter de sa stabilité.
e. Donner l'allure de la courbe $E_p(r)$.
f. Selon la valeur de r_0 par rapport à r_e, discuter des différents mouvement possibles de A sur la tige une fois qu'il est lâché.

Exercice 3 (3 pts.)

Un point matériel de masse m est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O. Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable.



1. Etablir l'équation du mouvement mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :
   a. Le théorème du moment cinétique ;
   b. La relation fondamentale de la dynamique ;
   c. Le bilan énergétique.
2. Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

***N.B** : La question f de l'exercice 2 et la question 2 de l'exercice 3 sont facultatives.*