Contrôle n°1 (2h)

Exercice 1 *Question de cours*

On considère repères orthonormés $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ et $R(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$. Le premier est supposé Galiléen lié à la base cartésienne $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ et le deuxième est mobile lié à la base sphérique $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$. La position d'un point matériel M de l'espace est définie par le vecteur position $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$.

1. Ecrivez l'expression du vecteur position dans les deux bases, cartésienne et sphérique ;
2. Donnez l'expression du vecteur $\vec{e}_x$ dans la base sphérique ;
3. Donnez l'expression du vecteur $\vec{e}_y$ dans la base sphérique ;
4. Déduisez $\left[\frac{\partial\vec{e}_x}{\partial t}\right]_R$ et $\left[\frac{\partial\vec{e}_y}{\partial t}\right]_R$ dans la base sphérique $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$;
5. Calculez $\left[\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial t}\right]_R$ dans la base sphérique $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$;
6. Donnez les vecteurs de la base intrinsèque de Frenet, et montrez que l'accélération a deux composantes $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ suivant cette base et déterminez leurs expressions.

Exercice 2

Dans un référentiel Galiléen $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le vecteur position d'un point matériel M, se déplacant dans le plan (OXY), est donné par l'expression : $\vec{r}=a\cos\omega t\ \vec{\imath}+b\sin\omega t\ \vec{\jmath}$ où a,b et ω sont des constantes positives telles que $a>b$.

1. Trouvez l'équation de la trajectoire de ce point matériel ;
2. Donnez graphiquement l'allure de cette trajectoire ;
3. Déterminez l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$;
4. Déterminez l'expression du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$;
5. Déduisez l'intervalle du temps dans lequel le mouvement de M par rapport à R est accéléré ;
6. Calculez l'angle entre le vecteur position et le vecteur accélération et commentez le résultat ;
7. Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération $\vec{\gamma}$;
8. Trouvez le rayon de la courbure de la trajectoire de M ;
9. Donnez les coordonnées polaires du point matériel M ;
10. Déduisez l'équation polaire du mouvement du point matériel M.

On donne : $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

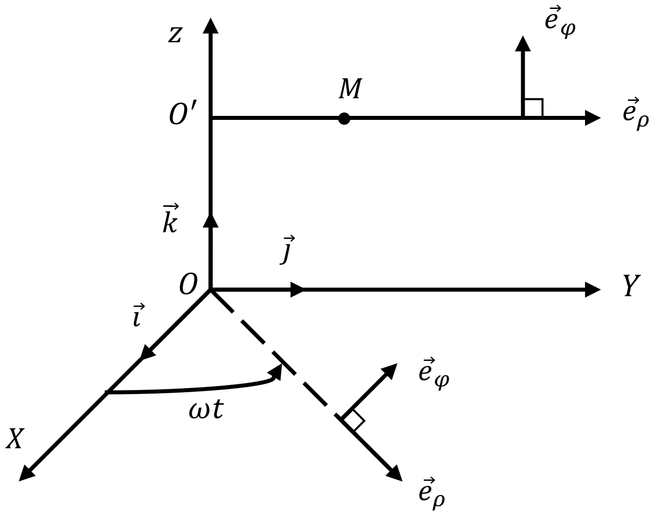
Exercice 3

Un point matériel M animé d'un mouvement uniforme de vitesse V_0 sur une tige de longueur L initialement confondue avec l'axe (OX). L'une des extrémités de la tige est lié à l'axe (OZ) en un point O' qui se déplace verticalement avec une vitesse constante égale à V_0, la tige tourne autour de l'axe (OZ) avec une vitesse angulaire constante ω_0 et reste toujours dans une position horizontale, voir figure.

Le repère $R(O,X,Y,Z)$ muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est un repère absolu, alors que le repère $R'(O,X',Y',Z')$ muni de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ est un repère relatif, l'axe (OZ) et l'axe $(O'Z')$ sont confondu.

Condition initiales : à $t=0$, le point O' est confondu avec le point O et la tige est confondue avec l'axe (OX).

Contrôle n°1 (2h)



1. Déterminez l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t ;
2. Déduisez l'expression de la vitesse absolue $\vec{V}(M/R)$ par un calcul direct ;
3. Déduisez l'expression de l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M/R)$ par un calcul direct ;
4. Retrouvez $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$ en utilisant les lois de compositions des vitesses et des accélérations.