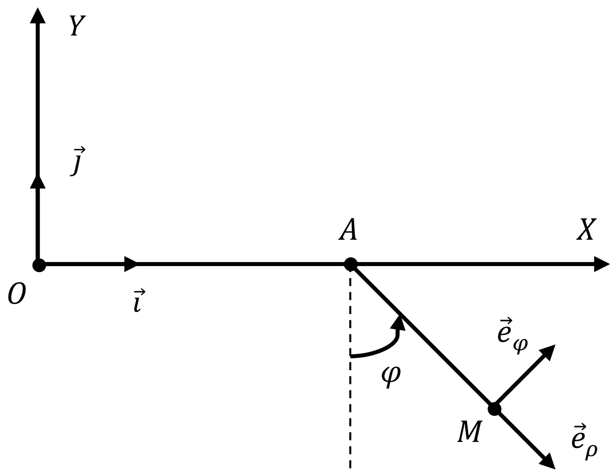
Contrôle n°2 (2h)

**<u>Exercice 1</u> (13 pts.)**

Soit $R(O, X, Y, Z)$ un référentiel supposé galiléen muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $(OY)$ étant la verticale ascendante.
Un point $A$ animé d'un mouvement uniformément varié sur l'axe $(OX)$ avec une accélération $g$ identique à celle de la pesanteur. Le vecteur position de $A$ est donné par $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} g t^2 \vec{\imath}$.
Au point $A$ est suspendi u fil tendu de longueur $AM = L$ et de masse négligrable, au bout du quel se trouve un point matériel $M$ de masse $m$ (voir figure).




Outre le point, le point matériel $M$ est soumis à la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$ ($T > 0$ condition nécessaire pour que le fil soit tendu).
On se propose d'étudier le mouvement du point $M$ dans le rééférentiel relatif défini par $R_1(A, X, Y, Z)$ lié au point $A$.
**Il est conseillé de faire tous les calculs dans la base ($\vec{e}_\rho$,$\vec{e}_\varphi$) lié au point $M$.** On pose $(\vec{\imath}, \vec{e}_\rho) = \varphi(t)$ fonction quelconque du temps.

1. Déterminer les accélérations, relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entrainement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ ;
2. Quelles sont les forces appliquées au point $M$ dans le repère relatif ;
3. Montrer qu'il existe qu'une seule position d'équilibre $\varphi_0$ du point matériel dans son mouvement relatif qu'on déterminera ;
4. Par application du principe fondamentale de la dynamique dans le référentiel relatif $R_1$,
   4.1. Donner une équation différentielle du second ordre en $\varphi$ du mouvement $M$ ;
   4.2. Donner l'expression de $T$ en fonction de $\varphi$ et $\dot{\varphi}$ ;
5. En déduire alors les expression de $\dot{\varphi}^2$ et $T$ en fonction de $\varphi$ seulement. On utilisera pour cela le fait que la vitesse relative à l'équilibre est nulle ;
   5.1. Montrer que toutes les forces appliquées au point matériel $M$ dans le référentiel relatif $R_1$ dérivent d'une énergie potentielle $E_p$ dans ce même référentiel qu'on déterminera ;
   5.2. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, Retrouver alors l'équation $\dot{\varphi}^2$ en fonction de $\varphi$ déjà établit en (5) ;
   5.3. Discuter la stabilité de l'équilibre $\varphi_0$ ;
6. Décrire brièvement le phénomène mécanique une fois l'équilibre atteint. Faire un schéma explicite.

**Exercice 3 (7 pts.)**

Soit un point matériel $M$, se baladant dans un plan $P$, et situé à une distance $\rho$ d'un point fixe $O$ du plan $P$, tel que en coordonnées polaires on a : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\rho$ étant le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$. Le mouvement est un mouvement à accélération centrale.

1. Donner les expressions des vecteur vitesse et accélération en cordonnées polaires ;
2. Donner l'expression de la constante des aires $C$ ;
3. On pose $u = \frac{1}{\rho}$ ;

   3.1. Montrer que dans le cas d'un mouvement à force centrale, l'accélération peut s'écrire :
   $$\gamma = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right]$$

   3.2. Ce point matériel est de masse $m$, il décrit sous l'action d'une force centrale $\vec{F}$, la conique d'équation polaire : $\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$ ; Montrer que la force $\vec{F}$ est une force attractive inversement proportionnelle au carré de la distance à l'origine $O$ ;

   3.3. Montrer que dans le cas d'un mouvement à force centrale, la vitesse peut s'écrire :
   $$V^2 = C^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

   3.4. Sachant que le ration vecteur $\rho$ croît avec $\varphi$ et que la vitesse a pour module $V = \frac{k}{\rho}$ avec $k = a\,C$ et $a > 1$. Montrer que la trajectoire d'une particule soumise à la force centrale est une spirale logarithmique de la forme : $\rho = Ae^{\alpha\varphi}$ $(\alpha > 0)$.