Université Hassan 1er
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique
Professeur responsable : A. GHAZDALI & Y. EL HADFI
Année Universitaire 2016 – 2017

Examen Rattrapage-Algèbre 2

Durée : 1 h 30

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Exercice 1

1. Soit E un K-espace vectoriel. Montrer que si E_1 et E_2 sont deux sous espaces de E , alors l'intersection $E_1 \cap E_2$ est aussi un sous espace vectoriel de E
2. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ une application.
   2.1 Donner la définition de « f est une application linéaire de E dans F ». On suppose ces conditions réalisées.
   2.2 Définir le noyau $Kerf$ de f.
   2.3 Donner une condition sur $Kerf$ pour que l'application f soit injective. Justifier.
   2.4 Définir le rang de f. Quel lien y a-t-il entre le rang de f et la dimension de $Kerf$?

$\square$

Exercice 2

Soit $E = \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées et soit F le sous-ensemble de E défini par

$$F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \; : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.
2. Donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?

$\square$

Exercice 3

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (7x+2y, -4x+y)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice A de f relativement à la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$.
3. Soient deux vecteurs $v_1 = (1,-2)$ et $v_2 = (1,-1)$.
   3.1 Montrer que $B' = \{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   3.2 Exprimer les vecteurs $f(v_1)$ et $f(v_2)$ dans la base B'.
4. Donner la matrice M de f relativement à la base B'.
5. Donner la matrice P de passage de la base B à la base B'. Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.
6. Soit n un entier naturel non nul.
   6.1 Rappeler la formule qui lie les matrices A, M et P.
   6.2 L'inversible P^{-1} de P est donné par $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

$\square$