Contrôle n°2

Partie 1

Question 1 (4 pts.)

Répondre par VRAI ou FAUX puis justifier la réponse.

1. Soit C une courbe paramétrée sur $\mathbb{R}$ par $x(t)$ et $y(t)$.
   Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors C est forcément symétrique.
2. Si un vecteur $\vec{r}$, parametrisant une courbe C, est toujours perpendiculaire au vecteur tangent $\vec{r}'$, alors la courbe C repose sur une sphère centrée à l'origine.

Question 2 (6 pts.)

Etude de la courbe C paramétrée par $\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$

1. Préciser si la courbe présente une symétrie par rapport à (ox) ou (oy). En déduire un domaine réduit de C.
2. Déterminer les points à tangentes verticales, horizontales et stationnaires.
3. Est-ce-que la courbe possède des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations, la position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.
4. Déterminer l'intersection de la courbe et les axes (ox) et (oy).
5. Déterminer les points doubles.
6. Construire le tableau des variations.
7. Tracer la courbe C.

Partie 2

Question 3 (4 pts.)

Résoudre l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

$$x^2(x^2-1)\, y' + 2\, y \;=\; x^2$$

Question 4 (2 pts.)

Trouver la fonction vectorielle qui représente la courbe d'intersection du plan $y + z = 2$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 1$.

Question 5 (4 pts.)

Considérons l'hélix $r(t) = \cos(t)\, \vec{\imath} + \sin(t)\, \vec{\jmath} + t\vec{k}$

1. Montrer que le vecteur $\vec{N}$ est perpendiculaire à l'axe (oz).
2. Déterminer les équations du plan normal et du plan osculateur en $P(0,1,\frac{\pi}{2})$.