Analyse 2

Contrôle Continu n° 1- Lundi 29 Mai 2017
Durée : 1 heure 30 min

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. **(6 pts)**
Soit $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} & si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(0.1) Est-elle continue sur $I\!R^2$?

(0.2) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f.

(0.3) La fonction f est-elle de classe $C^1(I\!R^2)$?

(0.4) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $I\!R^2$?

Exercice 2. **(6 pts)** Soit la fonction

$$f(x,y) = -2x + (x-2y)^2 + 3y^3$$

(0.1) Trouver tous les points critiques de f et déterminer leur nature.

(0.2) Est-ce que cette fonction admet un minimum global ou un maximum global ? Justifier.

(0.3) On chercher à minimiser la fonction f. Quel est le prochain point obtenu par la méthode du gradient en partant du point $(0,0)$?

Exercice 3. **(6 pts)** Considérons la fonction $f(x,y) = y\ln(x)$ sur le domaine

$$D = \{(x,y) \in I\!R^2 : 1 \leq x \leq 3, \quad -1 \leq y \leq 1\}.$$

(0.1) Donner $L(x,y)$ le polynôme de Taylor de f de degré 1 centré en $(2,0)$.

(0.2) Donner $Q(x,y)$ le polynôme de Taylor de f de degré 2 centré en $(2,0)$.

(0.3) Donner une borne supérieure sur la valeur de $|f(x,y) - L(x,y)|$ pour tout $(x,y) \in D$.

Exercice 4. **(2 pts)**
Soit $u = f(x,y)$ où $x = e^s\cos(t)$ et $y = e^s\sin(t)$. Démontrez que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

FIN DE L'EPREUVE.