

## Analyse 2

Durée : 2 heures  
Examen du Mardi 20 Juin 2017

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

### Exercice 1. (5 pts)

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E)  $|x|y' + (x-1)y = x^2$ .

(0.1) Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis sur  $\mathbb{R}_-^*$

(0.2) On cherche maintenant les solutions  $f$  définies et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

a- Déterminer  $f(0)$ . Que peut-on dire des restrictions de  $f$  à  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ ?

b- En déduire qu'il existe une unique solution définie sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 2. (5 pts)

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$y'' - 2ky' + (k^2 + 1)y = e^x \sin(x), \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad (1)$$

### Exercice 3. (5 pts)

Calculez par la méthode des multiplicateurs de Lagrange les valeurs extrêmes de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = xy$  dans le disque  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$ .

### Exercice 4. (5 pts)

On considère la courbe paramétrée  $\mathcal{C}$  définie sur  $]0, +\infty[$  tel que pour tout  $t$  strictement positif,  $\mathcal{C}(t)$  ait pour coordonnées  $(x(t), y(t))$  avec

$$\begin{cases} x(t) = \ln(3) + 2\ln(t) - t^2 \\ y(t) = t - \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

(0.1) Étudier les limites aux bornes du domaine de définition.

(0.2) Étudier les variations de  $x$  et  $y$  et dresser un tableau de variations.

(0.3) Étudier les branches infinies de la courbe  $\mathcal{C}$ .

(0.4) Étudier la nature du point  $\mathcal{C}(1)$ . donner un vecteur directeur de la tangente en  $\mathcal{C}(1)$ . à la courbe.

(0.5) Représenter graphiquement la courbe  $\mathcal{C}$ .

FIN DE L'ÉPREUVE