

Analyse 2

Contrôle Continu n° 1- Mercredi 18 Avril 2018

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2}$.

(0.1) Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ de trois façons différentes.

(0.2) Déterminez le taux de variation de f au point $P(2, 0)$ dans la direction \overrightarrow{PQ} avec $Q(1, 2)$.

(0.3) Dans quelle direction f varie-t-elle le plus vite? Quelle est cette vitesse de variation maximale?

Exercice 2. (4,5 pts)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(0.1) Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

(0.2) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f .

(0.3) La fonction f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$? Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f ?

Exercice 3. (4 pts) Soit la fonction

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

(0.1) Trouver tous les points critiques de f et déterminer leur nature.

(0.2) Appliquer la méthode du gradient en partant du point $(\frac{1}{2}, 0)$, dans le but de trouver un minimum local.

Exercice 4. (4,5 pts)

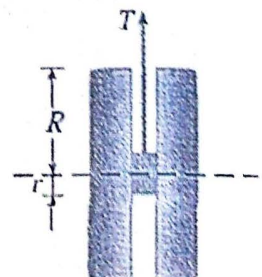
La longueur l , la largeur w et la hauteur h d'une boîte changent en fonction du temps t . À un instant donné les dimensions sont $l = 1\text{m}; w = h = 2\text{m}$, et l et w augmentent au taux de 2ms^{-1} tandis que h diminue au taux de 3ms^{-1} . Calculer les taux de variation du volume, de la surface et de la longueur de la diagonale.

Exercice 5. (3 pts)

La tension T de la cordelette du yo-yo en figure est décrite par la fonction

$$T(r, R) = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

où m est la masse du yo-yo et g l'accélération due à la gravité. Donner une estimation de la variation (dT) de T ainsi que l'accroissement (ΔT) lorsque R passe de 3cm à 3,1 cm et r passe de 1cm à 1,2 cm. Comparer les résultats.



FIN DE L'ÉPREUVE