

Analyse 2

Durée : 2 heures

Examen du Mardi 26 Juin 2018

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. (3 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(0.1) Est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?

(0.2) Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f . (Remarquer que $f(x, y) = f(y, x)$)

(0.3) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 2. (3 pts)

Étudiez les extrémums de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Exercice 3. (6 pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur \mathbb{R} :

(0.1) $(x + 1)y' + y = (x + 1)\cos(x)$.

(0.2) $y'' + 2y' + y = xe^x$.

(0.3) $(x^2 + 1)y'' + (x^2 - 2x + 1)y' - 2xy = 0$ (à l'aide du changement de fonction inconnue $z = y' + y$.)

Exercice 4. (4 pts)

Calculez par la méthode des multiplicateurs de Lagrange les valeurs extrêmes de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z \leq 3$.

Exercice 5. (4 pts)

On considère la courbe paramétrée \mathcal{C} définie par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{t^2 - 2t} \\ y(t) = \frac{t^2 - 3}{t} \end{cases}$$

(0.1) Étudier les limites aux bornes du domaine d'étude et les branches infinies de la courbe \mathcal{C} .

(0.2) Dresser un tableau de variations.

(0.3) Chercher les points doubles.

(0.4) Représenter graphiquement la courbe \mathcal{C} .

FIN DE L'ÉPREUVE