Contrôle n°1

Exercice 1

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$

1. Calculer ${}^tAA$ en déduire $|\det A|$.
2. On suppose que $(y, z, t) \neq (0,0,0)$
   (a) Montrer que l'application $x \mapsto \det A$ est polynomiale unitaire de degré 4.
   (b) Montrer que cette application est de signe constant.
   (c) En déduire $\det A$. Ce résultat est-il conservé pour $(y, z, t) = (0,0,0)$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante d'invisibilité de A.

Exercice 2

1. Soit $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ calculer le déterminant suivant de taille $n \times n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3

Soient a, b et c des réels.
Résoudre par la méthode des pivots de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x - y + z + t = 3 \\ 5x + 2y - z + 3t = 5 \\ 3x - 4y + 3z + 2t = 1 \\ 6x + y - 2t = 8 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$