Contrôle n°2

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

et f l'endomorphisme associé canoniquement.

1. Déterminer l'unique valeur propre λ de A.
2. A peut-elle être diagonalisable.
3. Déterminer le sous-espace propre associé.
4. Soient (v_1, v_2) une base de $\ker(A - \lambda\, I_4)$. Déterminer deux vecteurs ω_1, ω_2 tels que $f(\omega_1) = \lambda\omega_1 + v_1$ et $f(\omega_2) = \lambda\omega_2 + v_2$.
5. Montrer que $(v_1, \omega_1, v_2, \omega_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
6. Montrer que A est semblable à la matrice triangulaire T qu'on déterminera.
7. Calculer A^n pour $n \epsilon \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour tous $P, Q \epsilon E$ on pose : $< P, Q > = \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(1)\, Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.
2. Donner une base orthonormale de E.
3. Déterminer l'orthogonal de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la projection orthogonale et le symétrique orthogonal de X^3 par rapport à $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Déterminer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3

Soit la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est une matrice orthogonale.
2. Déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP = diag(1,1,-1)$