Rattrapage

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

1. Reduction de A :
   a. Déterminer les valeurs propres de A.
   b. Déterminer les sous espaces propres associés aux valeurs propres.
   c. Donner le polynôme minimal de A.
   d. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire T qu'on déterminera.
   e. Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   f. En déduire A^n.
2. Un problème de Cauchy :

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x'(t) + 4y'(t) - 2z'(t) = 0 \\ 6y'(t) - 3z'(t) = 0 \\ -x'(t) + 4y'(t) = 0 \\ x(0) = 1; y(0) = 0; z(0) = -1 \end{cases}$

3. Commutant d'une matrice.
   L'ensemble noté $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ s'appelle le commutant de A.
   a. Montrer que $C(T)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b. Déterminer la dimension de $C(T)$.
   c. Montrer que l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme d'espace vectoriel.
   d. Que peut-on déduire de $C(A)$.

Exercice 2

Soit la matrice $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -6 \\ -2 & 9 & -6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice A est orthogonale.
2. Déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer F l'orthogonal de $\ker(1 - I_3)$.
4. Déterminer la matrice B associée canoniquement à la réflexion par rapport à F.
5. Quelle est la nature de AB.