Université Hassan 1er
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique
Professeur responsable : A. GHAZDALI
Année Universitaire 2017 – 2018

Examen 1-Algèbre 3

Durée : 2 h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Exercice 1 [3 pts]

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(P(X)) = P(X+a) - P(X-a).$$

Discuter, suivant les valeurs de a, le rang de f_a. □

Exercice 2 [5 pts]

Soit Δ_n le déterminant suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$

$\boxed{1 \text{ pt}}$ 1. Calculer Δ_1, Δ_2, et Δ_3.

$\boxed{2 \text{ pt}}$ 2. Montrer que, $\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}$.

$\boxed{2 \text{ pt}}$ 3. En déduire la valeur de Δ_n, en fonction de a, b et n. □

Exercice 3 [7 pts]

Soient a, b, α, β des réels et (S) le système linéaire, d'inconnues x, y, z, t, donné par :

c

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - 2z + 2t = b \\ 2x + y + \alpha z + \beta t = c \end{cases}$$

$\boxed{0.5 \text{ pt}}$ 1. Donner l'écriture matricielle du système (S).

$\boxed{1.5 \text{ pt}}$ 2. Soient $\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \beta \end{vmatrix}$, $\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix}$. Calculer δ_1, δ_2 et δ_3.

$\boxed{1.5 \text{ pt}}$ 3. En déduire le rang de (S) suivant les valeurs de α et β.

4. On suppose que $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{5}{2}$.

   $\boxed{0.5 \text{ pt}}$ a. Déterminer le rang de (S).

   $\boxed{0.5 \text{ pt}}$ b. Calculer $\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix}$.

   $\boxed{1 \text{ pt}}$ c. Quelle relation doivent satisfaite a, b, c pour que (S) soit compatible.

$\boxed{1.5 \text{ pt}}$ 5. On suppose que $a = b = 1$, $c = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{5}{2}$. Résoudre le système (S). □

Exercice 4 [5 pts]

Soient m un réel et (S_m) le système linéaire d'inconnues x, y, z, donné par :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Résoudre le système (S_m). □