Université Hassan 1er
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique
Professeur responsable : A. GHAZDALI
Année Universitaire 2017 – 2018

Examen de rattrapage-Algèbre 3

Durée : 2 h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Exercice 1 [10 pts]

Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2a \\ -6 & 5 & -3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a. Calculer le polynôme caractéristique de A et donner l'ensemble des valeurs propres.
   b. En déduire que que la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. a. Calculer une base de chaque sous-espace propre associé.
   b. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est diagonalisable en précisant la matrice de passage.
3. On suppose dans cette question que $a \neq 0$.
   a. Trigonaliser A en précisant la matrice de passage.
   b. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

□

Exercice 2 [10 pts]

Soit φ la forme bilinéaire de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique et donner sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère la famille $B' = (1 - X^2, X, X^2)$
   a. Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de φ dans cette base.
   b. En déduire l'expression, dans cette base, de φ et de la forme quadratique q associée.
   c. Déterminer l'ensemble J_q des vecteurs isotropes pour q.
3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\}$
   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer une base de F.
   b. Déterminer l'orthogonal de F relativement à φ.

□
