Contrôle n°1 (2h)

Question 1 (4 pts.)

En cas de convergence, calculer la valeur de l'intégrale :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sinh(t)}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt$.

Question 2 (5 pts.)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer $f(0)$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

Question 3 (6 pts.)

1. Etudier la nature des séries numériques suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.
   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\,cos^2(n)}$.
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n-2}{n^3}$.

2. Estimer l'erreur relative à l'approximation :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n-2}{n^3} \simeq \sum_{n=1}^{100} \frac{n-2}{n^3}.$$

Question 4 (5 pts.)

Soit (f_n) une suite de fonctions définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$.
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $[1, +\infty[$.