Rattrapage (2h)

Question 1 (6 pts.)

On pose $f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1}x^{2n+2}lnx & \text{si x} \in]0,1] \\ 0 & \text{si x} = 0. \end{cases}$

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que cette série converge uniformément sur $[0,1]$.
3. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$. En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Question 2 (6 pts.)

Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'expression de $f^{(n)}(x)$. En déduire la série de Taylor $T(x)$, de f centrée en 1.
2. Déterminer l'intervalle de convergence L de cette série.
3. Vérifier que $T(x)$ converge aussi sur $I = \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right]$.
4. Montrer que l'erreur relative à l'approximation de f sur I par son polynôme de Taylor vérifie $|R_n(x)| \leq \varepsilon_n$, ou $(\varepsilon_n)_n$ est une suite numérique à déterminer.
5. Préciser la somme $T(x)$ sur I.
6. Déterminer une estimation polynomiale de f en 1 pour que $|R_n(x)| < 10^{-2}$ sur I.

Question 3 (2,5 pts.)

Expliciter les 4 premiers termes non nuls de la série entière centrée en 0 solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \; et \; y'(0) = 0. \end{cases}$$

Question 4 (5,5 pts.)

Considérons un signal 2π-périodique défini par $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Tracer ce signal sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier associé à f.
3. Donner l'expression du spectre de ce signale puis tracer sa représentation fréquentielle bilatérale.
4. En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.