Analyse 3

Durée : 2 heures 45 min
Examen du 9 février 2017

Le sujet est constitué de deux parties indépendantes. Chaque partie doit être rédigé sur une copie séparée. *Indication portant sur l'ensemble du sujet :*

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision.

Documents, téléphones portables et calculatrices non autorisés.

Partie 1

Question 1. (3 pts)
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

(0.1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

(0.2) Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \cos(n)u_n$ converge.

(0.3) Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

Question 2. (5 pts)

(0.1) Montrer la convergence de $a = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $b = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, et établir une relation entre a et b.

(0.2) Pour $x \in I\!R_+$, on pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.
Démontrer que F est ainsi définie sur $I\!R_+$, et continue sur $I\!R_+$. Calculer $F(0)$.

(0.3) Démontrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad e^{-x}(F'(x) - F(x)) = -a\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

(0.4) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$; pour cela, on pourra d'abord établir une majoration de $F(x)$ pour $x > 0$. en fonction de x et a.

(0.5) En déduire, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = ae^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, puis les valeurs de a et b.

Question 3. (2 pts) a et b sont deux réels strictement positifs. Étudier la convergence et la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n b^{n^2}}{n}$$

selon les valeurs de a et b.

Partie 2

Question 4. (3 pts)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, Considérons la suite de fonctions $(f_n)_n$, où $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n.$$

(0.1) Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_n$.

(0.2) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme sur $[0\,,\,1]$?

(0.3) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme sur $[\rho, 1]$, avec $0 < \rho < 1$?

Question 5. (4 pts)

On considère les suites de fonctions $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$. définies sur $[0,1]$ par

$$g_n = \frac{(-1)^n}{n+x^n}, \quad h_n = g_n - \frac{(-1)^n}{n}.$$

(0.1) On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, la fonction S est elle bien définie sur $[0,1]$?

(0.2) La convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x)$ est elle normale sur $[0,1]$?

(0.3) La convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est elle normale sur $[0,1]$? Est elle uniforme?

(0.4) Montrer que la fonction S est continue sur $[0,1]$

Question 6. (3 pts)

Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Que se passe t-il si $|x| = R$?

N.B : On donne les Séries de Taylor suivantes : $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$; $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

FIN DE L'EPREUVE.