Analyse 3

Contrôle Continu n° 1- Vendredi 10 Nov 2017

Durée : 2 heures

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts)

(0.1) Déterminer la nature des intégrales suivantes sans calculer leurs valeurs :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\ln(t+1)}{t^2}dt,\ J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}},\ K = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt \qquad \textbf{(1pt,1pt, 1pt)}$$

(0.2) Calculer la valeur de K. **(1pt)**

Exercice 2. (10 pts)

(0.1) Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$C \quad u_n = \frac{n^n}{e^n n!},\ v_n = \sin^2\left(\frac{2n+5}{3n^2+7}\right), c \qquad \textbf{(1pt,1pt)}$$

$$w_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)a^n} \quad a \in I\!R,\ z_n = \frac{\cos^n(x)}{n^\alpha}\ (x \in [0,\pi], \alpha \in I\!R). \qquad \textbf{(2 pts, 2pts)}.$$

(0.2) montrer la convergence et trouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. **(2 pts)**

(0.3) Soit la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$. Justifier la convergence de cette série, puis donner une approximation à 10^{-5} près de la somme. **(2 pts)**

Exercice 3. (6 pts)

Soit la fonction F définie sur $[0,1]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{Arctg(xt)}{1+t^2}dt$

(0.1) Montrer que F est continue sur $[0,1]$. **(1,5pt)**

(0.2) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,1]$. **(1,5pt)**

(0.3) Montrer que

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} & si\ x \in]0,1[\\ \frac{1}{2} & si\ x = 1. \end{cases} \qquad \textbf{(1,5pt)}$$

(0.4) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(s)}{s^2-1}ds$ converge et calculer sa valeur. **(1,5pt)**

FIN DE L'ÉPREUVE