Analyse 3

Examen Final- Vendredi 05 Janvier 2018

Durée : 2 heures

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. **(4 pts)**

Soit $a > 0$, Considérons la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par :

$$f_n(x) = n^a x e^{-nx}.$$

(0.1) Étudier la convergence simple de la suite $\{f_n\}_n$ sur $[0,+\infty[$

(0.2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ sur $[0,+\infty[$

Exercice 2. **(6 pts)**

On considère la série de fonction de terme général $\{f_n\}_{n\geq 1}$ définie sur$R$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}.$$

(0.1) Étudier la convergence simple de la série sur$R$.

(0.2) Montrer que cette série est uniformément convergente sur$R$.

(0.3) Montrer qu'il n'existe aucune partie deR^* sur laquelle cette série est normalement convergente.

(0.4) Montrer que cette série est continue.

Exercice 3. **(5 pts)**

Les deux questions sont indépendantes.

(0.1) Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| \leq R$ la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4n^2-1}.$$

(0.2) Chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x.$$

N.B : On donne les Séries de Taylor suivantes : $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 4. **(5 pts)**

Soit $f : R \to R$ la fonction impaire de période 2π définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

(0.1) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

(0.2) Trouver le développement en série de Fourier de f.

(0.3) En déduire les sommes des séries $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$; $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

FIN DE L'ÉPREUVE