Analyse 3

Examen Final- Vendredi 02 Février 2018

Durée : 2 heures

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts)

Soit $\alpha \in I\!R$, considérons la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $f_n : [0,+\infty[\to I\!R$ est la fonction définie par :

$$f_n(x) = x(1 + n^{\alpha} e^{-nx}).$$

(0.1) Étudier la convergence simple de la suite $\{f_n\}_n$ sur $[0,+\infty[$. **(1pt)**

(0.2) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $[0,+\infty[$. **(1,5pts)**

(0.3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$. **(1,5pts)**

Exercice 2. (6 pts)

On considère les suites de fonctions $\{g_n\}_{n\geq 1}$ et $\{h_n\}_{n\geq 1}$ définies surR^+ par

$$g_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}, \quad h_n(x) = (-1)^n g_n(x).$$

(0.1) Montrer que la série de fonctions $\sum g_n(x)$ converge simplement surR^+. **(1pt)**

(0.2) Montrer que la série $\sum g_n(x)$ ne converge pas uniformément surR^+. (Indication : penser à minorer le reste de la série $\sum g_n(x)$ par $\sum_{n=m+1}^{2m} g_n(x)$).**(2pts)**

(0.3) Montrer que la série $\sum g_n(x)$ est continue surR^+. (Indication : penser à la c. u. sur $[0,M]$, tel que $M>0$).**(1pt)**

(0.4) Montrer que la série $\sum h_n(x)$ converge uniformément surR^+ mais la convergence n'est pas normale surR^+. **(2pts)**

Exercice 3. (5 pts)

Les deux questions sont indépendantes.

(0.1) Déterminer le rayon de convergence R et l'intervalle de convergence (incluant l'analyse aux extrémités) de la série entière : $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$. **(2,5pts)**

(0.2) Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x|<R$ la somme de la série entière : $S(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$. Que se passe-t-il si $|x| = R$. **(2,5pts)**

N.B : On donne la Série de Taylor suivante $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Exercice 4. **(5 pts)**

Soit $f : R \to R$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$.

(0.1) Étudier la convergence de la série de Fourier de f. (**0,5pt**)

(0.2) Trouver le développement en série de Fourier de f. (**1,5pts**)

(0.3) En déduire les valeurs des séries $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; $B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$; $C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$; (**3pts**)

FIN DE L'ÉPREUVE