API 2/S3/ Module Mécanique II et DAO/ Année: 2017-2018

Contrôle II: Mécanique II

Contrôle final : Mécanique II

On considère dans un plan vertical (X,O,Z) une tige notée T, d'extrémités A et B qui glisse simultanément sur le mur et le sol comme le montre la figure ci-dessous. Cette tige est supposée homogène et indéformable. On admet dans cette étude que les forces de frottement sont négligeables. La demi longueur et la masse du solide considéré sont notées respectivement L et m. les vecteurs forces sont notées : $\vec{R}_A = R_A\vec{k}$ et $\vec{R}_B = R_B\vec{i}$

N.B on exprimera toutes les grandeurs vectorielles dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère cartésien R_0 (O,x,y,z) considéré ici comme Galiléen.

1° Déterminer l'expression de vecteur position $\overrightarrow{OG}$ du centre de masse G de la tige en fonction de L et θ. Déduire alors son vecteur vitesse $\vec{V}(G/R_0)$ et son vecteur accélération $\vec{\gamma}(G/R_0)$ préciser la nature de la trajectoire du point G dans le repère R_0

2° Déterminer la matrice d'inertie $\boldsymbol{I(T/R_G)}$ de la tige dans le repère$R_G(G, X, Y, Z)$. Etablir alors l'expression du vecteur moment cinétique $\boldsymbol{\vec{\sigma}_G(T/R_b)}$de la tige par rapport au repère barycentrique $\boldsymbol{R_b}$

3° En utilisant le théorème du centre d'inertie dans le repère $\boldsymbol{R_0}$, ecrire d'une part la force de réaction $\boldsymbol{R_A}$ en fonction de $m, g, L, \ddot{\theta}, \dot{\theta}$ et θet d'autre part la force de réaction $\boldsymbol{R_B}$ en fonction de $m, L, \ddot{\theta}, \dot{\theta}$ et θ

4° Trouver alors l'expression du moment dynamique $\boldsymbol{\vec{M}_d(G)}$ de la tige au point G.

5° Déterminer au point G le moment $\boldsymbol{\vec{M}_{ext}(G)}$ des forces extérieurs appliquées à la tige T en fonction de $m, g, L, \ddot{\theta}$ et θ

6° En appliquant le théorème du moment dynamique au point G, trouver l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ

7° Déduire la carré de la vitesse angulaire en fonction de l'angle θ sachant qu'à l'instant initial $t = 0s, \theta \approx \frac{\pi}{2}\, rad$ et $\vec{V}(G) = V_0\vec{i}$ Montrer que les expressions des forces peuvent s'écrire sous les formes suivantes

$$R_A = C_0 + C_1 sin\theta + C_2 \cos^2\theta \quad R_B = a_1 cos\theta + a_2 \sin(2\theta)$$