

Examen-Analyse 4

Durée : 1 h 30

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Exercice 1 (Question de cours)

Énoncer le théorème de Fubini d'intégration d'une fonction définie sur un rectangle dans \mathbb{R}^2 . Préciser les hypothèses sur la fonction. \square

Exercice 2

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1\}$.

1. Représenter D .
2. On considère une application

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi : (u, v) \rightarrow (x, y) \text{ avec } x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}.$$

- 2.1. Soit Δ un domaine tel que $\phi(\Delta) = D$. Montrer que

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq u \leq 1, -u \leq v \leq u\}.$$

- 2.2. Quelle est la matrice jacobienne $J_\phi(u, v)$ de ϕ au point (u, v) ?

- 3 Calculer

$$I = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy.$$

\square

Exercice 3

On considère l'ensemble défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

1. Calculer

$$I = \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy.$$

2. Soit l'ensemble

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \cos(x^2 + y^2)\}.$$

Calculer le volume de V

\square

Exercice 4 Calculer le volume intérieur à la sphère et au cylindre d'équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

\square