Université Hassan 1er
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique
Professeur responsable : A. GHAZDALI
Année Universitaire 2016 – 2017

Examen 2-Analyse 4

Durée : 2 h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Exercice 1 [4 pts]

1. Trouver f tel que $F = \nabla f$ pour
$$F = \left(\frac{2x\tan y}{(1+x^2)^2}, -\frac{1+\tan^2 y}{(1+x^2)}, 0\right)$$
2. Calculer l'intégrale curviligne $\int F.dr$ le long de l'arc de l'hélice $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = \theta$, qui va du point $\theta = 0$ au point $\theta = \frac{\pi}{2}$.

□

Exercice 2 [10 pts]

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par la sphère d'équation
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
avec $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

1. Soit S le bord de D. Faire un dessin de S et de D.
2. Calculer le volume de D.

Notons S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S contenue la surface $x^2+y^2+z^2 = 1$ et $S_2 = S \setminus S_1$ le complémentaire de S_1 dans S. Soit F le champ de vecteurs de composantes $(P,Q,R) = (x^3, y^3, z^3)$.

3. Calculer le flux de F à travers S_1 en cherchant une équation paramétrique de S_1.
4. Calculer le flux de F à travers S_2.
5. Calculer le flux de F à travers S en utilisant la formule de Gauss.
6. Calculer l'aire de S_1 et de S_2.
7. Calculer $\int_C F.dr$ la circulation de F le long de la courbe C, bord de S_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieure) en utilisant le théorème de Stokes.

□

Exercice 3 [6 pts]

1.1. Montrer que la fonction $u = x^2 - y^2 + x$ est harmonique.

1.2. Trouver une fonction v telle que $f(z) = u + iv$ soit holomorphe dans C.

Soit C le cercle unité $|z| = 1$.

2.1. En utilisant le théorème de Cauchy, évaluer $\int_C \frac{1}{2} z dz$.

2.2. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, évaluer $\int_C \frac{1}{z} dz$ et $\int_C \frac{3}{z^3} dz$.

2.3. En déduire $\int_0^{2\pi} (1 + 4\cos^2\theta) d\theta$ (**Indication :** Poser $z = e^{i\theta}$, d'où $d\theta = \frac{dz}{iz}$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

□