Université Hassan 1er
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique
Professeur responsable : A. GHAZDALI
Année Universitaire 2017 – 2018

Examen 1-Analyse 4

Durée : 2 h

N.B. : Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction; la référence des questions doit obligatoirement être mentionnée. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Exercice 1 [5 pts]

Soit A l'intégrale double définie par

$$A = \iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy, \text{ où } D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\}.$$

1. Calculer A.
   Soit B l'intégrale double définie par

$$B = \iint_{D_2} (x^2-xy+y^2)dxdy, \text{ où } D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-xy+y^2 \leq 4\}.$$

   Considérons le changement de variables

$$x = \sqrt{2}\,u - \sqrt{\frac{2}{3}}\,v, \qquad y = \sqrt{2}\,u + \sqrt{\frac{2}{3}}\,v$$

2. Exprimer B en fonction de A.
3. Déduire la valeur de B.

□

Exercice 2 [5 pts]

Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ limité par les courbes $x = \frac{y^2}{4}$ et $y = 2x$.

1. Représenter le domaine D sur une figure.
2. Calculer l'aire de D.
3. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D (y-x)dxdy,$$

   Notons C le bord de D orienté dans le sens direct.
4. Sans utiliser le théorème de Green-Riemann calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C y^2dx.$$

5. Calculer cette intégrale en utilisant la formule de Green-Riemann.

□

Exercice 3 [5 pts]

En utilisant un changement de variables approprié, calculer le volume de la partie limitée par la surface d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

□

Exercice 4 [5 pts]

Soit F le champ vectoriel défini par

$$F = ye^{x}cos(xy)\vec{i} + e^{x}[1 + xcos(xy) + sin(xy)]\vec{j}.$$

1. Montrer que F est conservatif
2. Déterminer les fonctions f telles que $\nabla f = F$.
3. Donner la valeur de $\int_C F$.
   où C est le demi-cercle unité supérieur de $\mathbb{R}^2$ orienté dans le sens direct.

□