Université Hassan 1er
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique
Professeur responsable : A. GHAZDALI
Année Universitaire 2017 – 2018

Examen 2- Analyse 4

Durée : 2 h

N.B. : Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction; la référence des questions doit obligatoirement être mentionnée. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Exercice 1

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ limité par le cylindre d'équation $x^2+y^2=1$ le plan $z=0$ et la surface $z=x^2+y^2+1$

1. Soit S le bord de D. Faire un dessin de S et de D.
2. Calculer le volume de D.

Notons S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S contenue dans le cylindre, et $S_2 = S \setminus S_1$ le complémentaire de S_1 dans S. Soit F le champ de vecteurs de composantes $(P, Q, R) = (x, y, z^2)$.

3. Calculer le flux de F à travers S_1.
4. Calculer le flux de F à travers S en utilisant la formule de Gauss.
5. Calculer le flux de F à travers S_2.
6. Calculer l'aire de S_1 et de S_2.
7. Calculer $\int_C F.dr$ la circulation de F le long de la courbe C, bord de S_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieure) en utilisant le théorème de Stokes.

□

Exercice 2

1. Calculer $\int_\gamma \bar{z}^2 dz$ le long des deux chemins suivants :
   a. γ est la droite de $(0,0)$ à $(1,1)$.
   b. γ est la composition des segments de $(0,0)$ à $(1,0)$ et de $(1,0)$ à $(1,1)$.
   c. En vue de ces résultats, est-ce que la fonction $\bar{z}^2$ peut etre la dérivée d'une fonction analytique $F(z)$?.
2. Prouver que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalents à $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$
3. Soit $0 < a < b$ sur l'axe réel positif et soit $C = \{|z| = r\}$ le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer :
$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz$$
4. Utiliser les formules intégrales de Cauchy pour calculer : $\displaystyle\int_C \frac{|z|e^z}{z^3} dz$
   où C est le cercle de centre 0 et de rayon 3.
5. Calculer
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta$$
   Astuce : Considérer l'intégrale $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z} dz$, où C est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

□