Université Hassan 1er
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga
Département de Mathématiques et Informatique
Professeur responsable : A. GHAZDALI
Année Universitaire 2017 – 2018

Examen Rattrapage-Analyse 4

Durée : 2 h

N.B. : Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction ; la référence des questions doit obligatoirement être mentionnée. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Exercice 1 Calculer

$$\iiint_D (5-\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$$

où D est le domaine de $\mathbb{R}^3$ borné par le paraboloiide $z=25-x^2-y^2$ et le plan $z=9$. □

Exercice 2 Soient D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\leq 1\}$$

et C le bord de D orientée dans le sens direct. Soit I l'intégrale

$$I=\int_C (y+y^2)\,dx+2x^2dy.$$

1. Calculer I en utilisant une paramétrisation de C.
2. Calculer I en utilisant la formule de Green-Riemann. □

Exercice 3 Soit

$$F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\longmapsto\begin{pmatrix}0\\0\\xy+y^2\end{pmatrix},$$

et

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}$$
$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\leq 1\}$$

Calculer le flux de F à travers de Σ dans les deux façons suivantes :

1. avec une paramétrisation de Σ,
2. avec la formule de Gauss et le flux de F à travers S. □

Exercice 4 On note C le cercle unité et soit f une fonction holomorphe.

1. Exprimer en fonction des valeurs de f l'intégrale

$$I=\int_C\left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz.$$

2. En déduire la valeur de

$$J=\int_0^{2\pi} f(e^{it})cos^2(t/2)dt.$$

□
