Contrôle (2h)

Exercice 1 (10 pts.)

1. Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$ où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

   a. Utiliser la décomposition $A = LU$ pour trouver la solution du système linéaire $Ax = b$.
   b. Résoudre $A^2x = b$ sans calculer A^2.

2. Pour résoudre le système linéaire $Cx = d$ suivant

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On considère la méthode de Richardson suivante : $x_{k+1} = x_k + \alpha(d - Cx_k)$ avec α un réel non nul.

   a. Montrer que la méthode est consistante (c.à.d. si $x_k \to \bar{x}$ alors $C\bar{x} = d$).
   b. Ecrire la matrice d'itération. Qu'est-ce qu'on peut dire sur la convergence de cette méthode ?

Exercice 2 (4,5 pts.)

Soit $\varepsilon \in]0;1[$ et f une fonction de classe $C([0;1])$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation P_ε interpolant f en $\{0; \varepsilon ; 1\}$ en utilisant la méthode de Newton.
2. Calculer $P(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in [0;1]$. Montrer que P est l'unique polynôme vérifiant $P(0) = f(0), P'(0) = f'(0)$ et $P(1) = f(1)$.
3. Soit x_0 arbitraire dans $]0;1[$ et $\emptyset(t) = f(t) - P(t) - Kt^2(t-1)$ avec $K = \frac{f(x_0) - P(x_0)}{x_0^2\,(x_0 - 1)}$.

Montrer que $\emptyset$ est nulle en un point $\xi \in]0;1[$, puis déduire une majoration de l'erreur $Sup_{x\in[0;1]} |f(x) - P(x)|$.

Exercice 3 (5,5 pts.)

Pour calculer une valeur approchée de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, on considère la formule de quadrature suivante :

Pour $\alpha \in]0;1[$; $\qquad J(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(0) + w_2 f(\alpha)$.

1. Ecrire les équations qui déterminent les inconnues w_0, w_1, w_2 (en fonction de α) de sorte que $I(p) = J(p)$ pour tout polynôme de degré 2.
2. Ecrire la formule obtenue pour $\alpha = 1$. Quelle formule obtient-on ?
3. Si on considère maintenant α comme une inconnue, calculer α pour que la quadrature soit exacte (i.e. $I(f) = J(f)$) pour des polynômes de degré supérieur à deux. Jusqu'à que degré n peut-on aller ?
4. On veut une formule de même type sur l'intervalle $[0;1]$. Déduire de ce qui précède mes deux points a et b telle que :

$$\tilde{J}(f) = w_0 f(a) + w_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Soit égale à $\int_0^1 f(x)\,dx$ pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n.