ENSA

Examen d'Analyse Numérique

Pr. IDRISSI FATMI

2$^{\text{ème}}$ ACPI

16/06/2017

Durée : 1 heure 30mn

Les documents et portables sont strictement interdits, les calculatrices sont autorisées.

On attachera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation claire et lisible des résultats dont il sera tenu compte lors de la correction.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \in C^3([a,b];\mathbb{R})$ et soit $a < b$ deux réels donnés. On cherche à approcher f sur l'intervalle $[a,b]$ par un polynôme p tel que

$$\begin{cases} p(a) = f(a) \\ p(b) = f(b) \\ p'(a) = f'(a) \end{cases} \qquad (1)$$

1. Construire les polynômes Q_1, Q_2 et Q_3 de degré 2 définis par

$$\begin{cases} Q_1(a) = Q_1'(a) = 0, \ Q_1(b) = 1 \\ Q_2(a) = Q_2(b) = 0, \ Q_2'(a) = 1 \\ Q_3(b) = Q_3'(a) = 0, \ Q_3(a) = 1 \end{cases}$$

2. Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (ensemble de polynômes de degré inférieur ou égal à 2).
3. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant (1) est unique.
4. Construire un polynôme d'interpolation de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant (1) et exprimé dans la base (Q_1, Q_2, Q_3).
5. Montrer que l'erreur d'interpolation s'écrit :

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-a)^2(x-b)}{6} f^3(\xi), \qquad a < \xi < b \qquad (2)$$

(*Indication* : Définir pour $x \neq a$ et $x \neq b$ la fonction $\varphi(t) = f(t) - p(t) - A(x)(t-a)^2(t-b)$ avec $A(x)$ est donnée par $\varphi(x) = 0$).

6. (a) Déterminer les réels α, β et γ dans la formulation suivante

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx \alpha g(-1) + \beta g'(-1) + \gamma g(1)$$

pour que la méthode soit exacte sur les polynômes de degré 2. Quel est le degré de précision de la méthode ?

(b) Soit $g \in C^3([-1,1];\mathbb{R})$. Donner une majoration de l'erreur d'intégration en fonction des dérivées de g.

(*Indication* : Utiliser l'égalité (2)).

Exercice 2

1. On considère le système linéaire $Ax = b$,

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trouver L et U telle que $A = LU$ (respecter les notations du cours).

(b) Résoudre le système $Ax = b$.

2. Pour résoudre le système précédent, on considère la méthode de Richardson suivante

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k)$$

avec α un réel non nul.

(a) Montrer que la méthode est consistante (c.à.d si $x_k \to \bar{x}$ alors $A\bar{x} = b$).

(b) Ecrire la matrice d'itération. Qu'est ce qu'on peut dire sur la convergence de cette méthode?