
Exercice 1 (12,5 pts)

Soient x_0 et x_1 deux réels de $[0,1]$ tels que $x_0<x_1$. g une fonction de classe $C^3([x_0,x_1])$ et $P(x)$ polynôme de degrés 2 vérifiant : $$P(x_0)=g(x_0);\ P(x_1)=g(x_1) \text{ et } P'(x_1)=g'(x_1) \qquad (1)$$

I) 1/ Montrer que si P existe, alors il est unique.

2/ Prouver qu'il existe θ_x tel que $$g(x)-P(x)=\frac{g^{(3)}(\theta_x)}{6}(x-x_0)(x-x_1)^2.$$

(*Indication*: utiliser pour un x arbitraire dans $]x_0,x_1[$ la fonction R définie par :

$$R(t)=g(t)-P(t)-\frac{g(x)-P(x)}{(x-x_0)(x-x_1)^2}(t-x_0)(t-x_1)^2)$$

II) On prend $x_0=0,\ x_1=1$ et $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et $P(x)=ax^2+bx+c$ vérifiant (1),

c.a.d $P(0)=g(0);\ P(1)=g(1)$ et $P'(1)=g'(1)$.

1/ Montrer que les réels $a,\ b$ et c sont solution du système linéaire : $AX=B$ avec

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix}c\\b\\a\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{bmatrix}1\\1/2\\-1/4\end{bmatrix}.$$

2/ Utiliser la décomposition $A=LU$ pour trouver la solution du système linéaire $AX=B$.

3/ Montrer que $|g(x)-P(x)|\leq\dfrac{4}{27}\quad \forall x\in]0,1[$.

4/ Déduire que $\left|\int_0^1 g(x)dx-\int_0^1 P(x)dx\right|\leq\dfrac{1}{12}$.

Exercice 2 (07,5 pts)

Soit une fonction $f\in C([-1,1])$. On note $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[X]$ le polynôme d'interpolation de f aux points -1, 0 et 1.

1) a/ Donner l'expression de P de la forme
$$\mathrm{P}(x)=f(-1)L_1(x)+f(0)L_2(x)+f(1)L_3(x).$$

b/ On déduire les coefficients $a_i,\ i=1,2,3,$ tels que la formule de quadrature
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=a_1f(-1)+a_2f(0)+a_3f(1)+E(f) \qquad (2)$$
soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux (c'est-à-dire $E(f)=0$ si $f\in\mathbb{R}_2[X]$).

2) Supposons ici que $f\in\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[X]$ le polynôme d'interpolation de f aux points -1, 0 et 1.

On note $s\in\mathbb{R}_3[X]$ le polynôme tel que $f(x)=\mathrm{P}(x)+s(x)$.

Montrer que $\quad s(x)=a(x^2-1)x \quad$ où $a\in\mathbb{R}$,

et en déduire que la formule (2) est en fait exacte pour tout polynôme de degré ≤ 3.

3) On supposera ici que $f\in C^4([-1,1])$. Montrer que dans ce cas l'erreur $E(f)$ de la formule de quadrature

s'écrit $$E(f)=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}K(t)f^{(4)}(t)dt,$$

où K est une fonction définie sur $[-1,1]$ dont on précisera l'expression générale.

Bon Courage